GH–nejednakost

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. *Dana je GH nejednakost. Primjena GH nejednakosti ilustrirana je na nizu zanimljivih zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *GH-nejednakost*

GH–inequality

Abstract. *GH-inequality is given. Application of GH inequality is illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *GH-inequality*

Neka je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dana n-torka pozitivnih brojeva. Tada su harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina n-torke a definirane redom sa

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

$$K_n(a) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$

Vrijedi

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a).$$

Pritom jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Nejednakosti $G_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq H_n(a)$, $A_n(a) \geq G_n(a)$, $K_n(a) \geq A_n(a)$, nazivamo redom geometrijsko–harmonijska, aritmetičko–harmonijska, aritmetičko–geometrijska, kraće, GH–nejednakost, AH–nejednakost, AG–nejednakost, KA–nejednakost.

Dokazat ćemo GH–nejednakost i primijeniti je na rješavanje nekoliko zadataka.

Dokaz GH–nejednakosti. Primijenimo AG–nejednakost (dokaz AG–nejednakosti se može vidjeti primjerice u [2]) na brojeve

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}.$$

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Imamo
$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}},$$
odakle slijedi
$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Zadatak 1. *Dokažite da za svaki prirodni broj $n>1$ vrijedi nejednakost*
$$1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>\sqrt[n]{\frac{2n^n}{n+1}}.$$

Rješenje. Nejednakost je ekvivalentna sa
$$\frac{n}{1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}<\sqrt[n]{\frac{n+1}{2}}.$$
Prema GH–nejednakosti je
$$\frac{n}{1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}<\sqrt[n]{1\cdot\sqrt[n]{2}\cdots\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}},$$
a prema AG–nejednakosti je dalje
$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}}<\sqrt[n]{\frac{1+2+\cdots+n}{n}}=\sqrt[n]{\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}}=\sqrt[n]{\frac{n+1}{2}}.$$

Zadatak 2. *Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost*
$$n^n\leq(n!)^2.$$

Rješenje. Za $n=1$ i $n=2$ vrijedi jednakost. Ako je $n\geq 3$, primijenimo GH–nejednakost na brojeve $1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ \ldots,\ (n-1)n$:
$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}} &< \sqrt[n-1]{(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdots\big((n-1)n\big)},\\
\frac{n-1}{(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})} &< \sqrt[n-1]{\big((n-1)!\big)^2\cdot n},\\
\frac{n-1}{1-\frac{1}{n}} &< \sqrt[n-1]{\big((n-1)!\big)^2\cdot n},\\
\frac{n-1}{\frac{n-1}{n}} &< \sqrt[n-1]{((n-1)!)^2\cdot n},\\
n &< \sqrt[n-1]{\big((n-1)!\big)^2\cdot n}.
\end{aligned}$$

Potenciramo posljednju nejednakost sa $n-1$ i dobivamo

$$n^{n-1} < \big((n-1)!\big)^2 \cdot n.$$

Pomnožimo posljednju nejednakost sa n. Dobivamo

$$n^n < (n!)^2.$$

Zadatak 3. *Neka je O oplošje kvadra, a V njegov obujam. Dokažite da vrijedi*

$$O^3 \geq 216V^2.$$

Rješenje. Neka su a, b, c duljine bridova tog kvadra. Prema GH–nejednakosti je

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Dalje imamo, redom,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{abc} &\geq \frac{3abc}{bc+ac+ab},\\
abc &\geq \frac{27a^3b^3c^3}{(ab+bc+ac)^3},\\
1 &\geq \frac{27a^2b^2c^2}{(ab+bc+ac)^3},\\
(ab+bc+ac)^3 &\geq 27a^2b^2c^2,\\
\big(2(ab+bc+ac)\big)^3 &\geq 216(abc)^2,\\
O^3 &\geq 216V^2.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$, tj. ako i samo ako je taj kvadar kocka.

Zadatak 4. *Dokažite da za prirodne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi nejednakost*

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}.$$

Rješenje. Broj a_1 uzmimo a_1 puta, broj a_2 uzmimo a_2 puta, …, broj a_n uzmimo a_n puta. Prema GH–nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}\\
\leq\ &\left(a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}}.
\end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1\cdot\frac{1}{a_1}+a_2\cdot\frac{1}{a_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{a_n}} &\le (a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}},\\
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} &\le (a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}},\\
\Big(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\Big)^{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\le a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Zadatak 5. *Dokažite da za prirodne brojeve a,b,c vrijedi nejednakost*

$$a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}\ge\frac{1}{3}(a+b+c).$$

Rješenje. Broj a uzmimo a puta, broj b uzmimo b puta, a broj c uzmimo c puta. Prema GH–nejednakosti imamo

$$\frac{a+b+c}{\big(\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}\big)+\big(\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{b}\big)+\big(\frac{1}{c}+\cdots+\frac{1}{c}\big)}\le\sqrt[a+b+c]{a^ab^bc^c}.$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}} &\le \sqrt[a+b+c]{a^ab^bc^c},\\
a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} &\ge \frac{1}{3}(a+b+c).
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Zadatak 6. *Neka su $a_1,a_2,\dots,a_n$ pozitivni brojevi čija je suma jednaka* 1. *Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$\Big(1+\frac{1}{a_1}\Big)\Big(1+\frac{1}{a_2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)\ge(n+1)^n.$$

Rješenje. Nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$\sqrt[n]{\Big(1+\frac{1}{a_1}\Big)\Big(1+\frac{1}{a_2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)}\ge n+1.$$

Dokažimo ovu nejednakost. Prema GH–nejednakosti je

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{\Big(1+\frac{1}{a_1}\Big)\Big(1+\frac{1}{a_2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)}\ge\frac{n}{\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{a_2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}}\\
=\ &\frac{n}{\frac{1}{\frac{a_1+1}{a_1}}+\frac{1}{\frac{a_2+1}{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{a_n+1}{a_n}}}=\frac{n}{\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+1}}\\
=\ &\frac{n}{\frac{a_1+1}{a_1+1}+\frac{a_2+1}{a_2+1}+\cdots+\frac{a_n+1}{a_n+1}-\big(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}\big)}\\
=\ &\frac{n}{n-\big(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}\big)}=\frac{1}{1-\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}}{n}}.
\end{aligned}$$

Sada primijenimo AH–nejednakost na brojeve $a_1+1,\ a_2+1,\ \ldots,\ a_n+1$:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}} &\leq \frac{(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_n+1)}{n} \\ &= \frac{n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n}=\frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}}{n} \geq \frac{n}{n+1}$$

i konačno

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_1}\right)\left(\frac{1}{1+a_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+a_n}\right)} &\geq \frac{1}{1-\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}}{n}} \\ &\geq \frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\frac{1}{n+1}}=n+1. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$.

Literatura

[1] E. Hódi, *Szélsöérték–feladatok elemi mególdaása*, Typotex, Budapest, 1994.

[2] B. Pavković, Ž. Hanjš, B. Dakić, P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, Element, Zagreb, 1994.

[3] J. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996.

[4] A. Varencza, T. Rozgonyi, *A tanárképzö föiskolák Péter Rösza matematikai versenyei IV., 1986–2002*, Typotex Kiadö, Budapest, 2003.